Прежде чем мы перейдём к основному вопросу, отвечу на вопрос «А если схема условно устойчива – это норм или нет?»
Видимо, люди проводят аналогию с грибами, зная, что связываться с условно съедобными грибы себе дороже. Но в ОММ иначе. Если схема ***условно*** устойчива, значит, что она устойчива при каком-то ***условии***. Вот вы применили критерий Неймана, получили:
вариант 1) схема неустойчива при любых τ и h (шаги по времени и координате). Ваша схема говно, несите следующую.
вариант 2) вы получили условие устойчивости на τ и h. Выполните его – и ваша схема будет устойчивой. τ и h определяете вы сами, вам что, сложно выбрать их какими надо?

Так, а теперь к основной теме – характеристики.

Определение. Характеристикой функции u(x,y) является кривая в плоскости OXY, задаваемая уравнением u(x,y)=C.

И тут я приведу аналогию… с географией. У вас это наверняка было на географии в классе так с 6-м и 7-м:

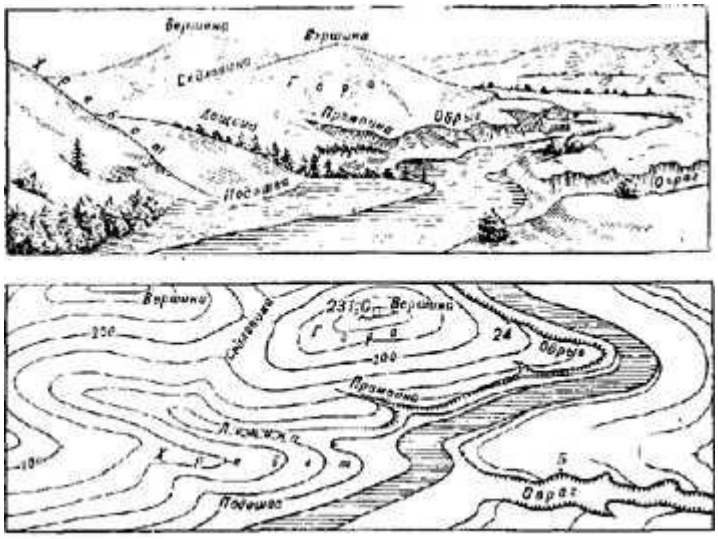
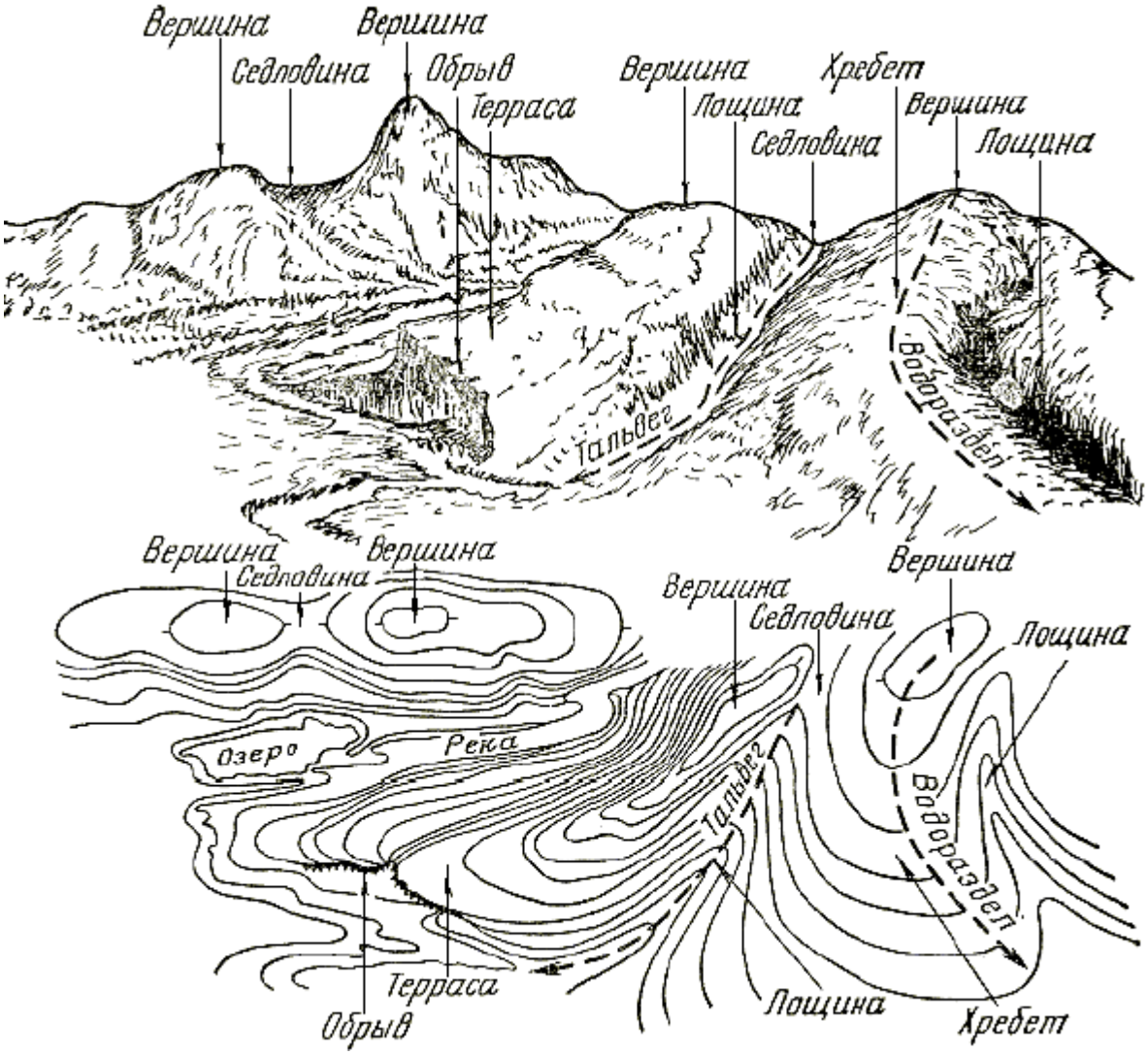
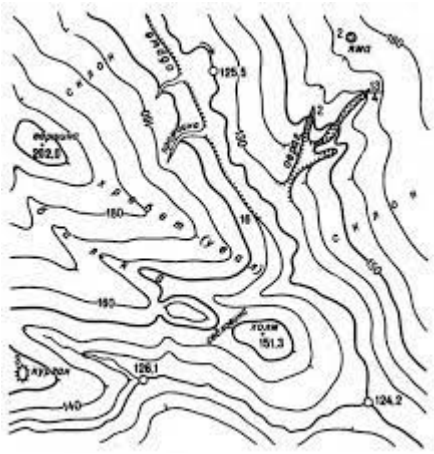


Рис. 33. Изображение на карте горизонталями типовых форм и деталей рельефа

В географии тоже есть характеристики, только там они называются горизонталями. В роли u там высота местности. Горизонтали – это кривые, где все точки находятся на одной высоте (см. рисунок выше).

Вот вам ещё рисунки, чтобы вы точно вспомнили (ну, наверняка было в школе на географии!)





Давайте получим уравнение горизонталей-характеристик.

Говорите, на них значение u(x,y)=константе C (имеющей смысл высоты)? Так и запишем:

u(x,y)=C

du(x,y)=0

Помним из матана-2, как считать дифференциал сложной функции? Конечно:

$$u_x dx + u_y dy = 0 \ (1)$$

И на этом пока остановимся.

А вот вам немного другая задача: ДУ в частных производных

$$u_x a(x,y,u) + u_y b(x,y,u) = 0 (2)$$

Предположим, что функция u(x,y) является решением ДУ. Тогда у неё есть характеристики. Каждая из них задаётся уравнением

$$u_x dx + u_y dy = 0 \ (1)$$

Давайте сравним (1) и (2). Не правда ли, есть что-то общее? ☺ Да, именно отсюда получается уравнение характеристики, которые вы наверняка писали

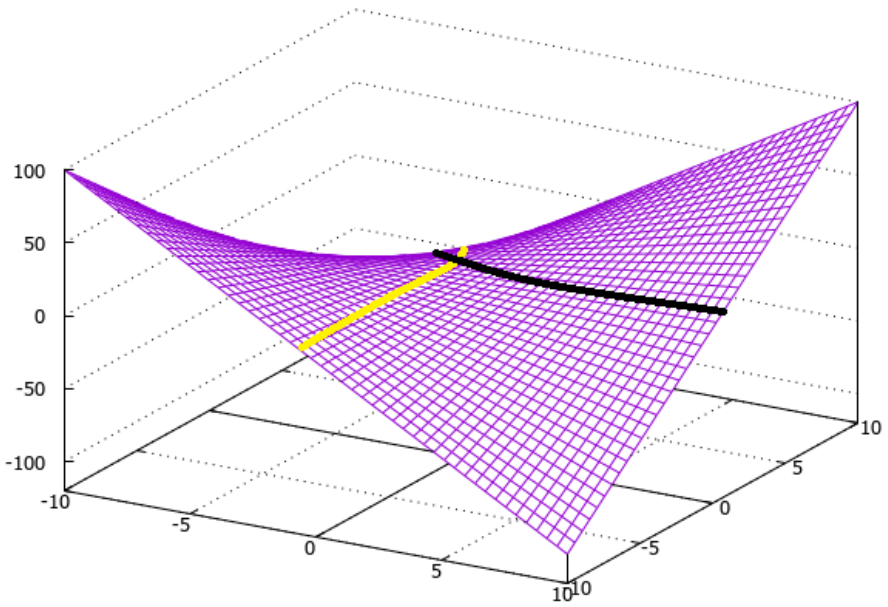
$$\frac{dx}{da(x,y,u)} = \frac{dy}{db(x,y,u)} \ (3)$$

Заметим, что мы предположили, что есть решение и получили уравнение (3) для его характеристик. Т.е. решения ДУ (2) мы пока не знаем, а вот уравнение его характеристик (3) у нас уже есть. (И оно, как правило, помогает решать ДУ (2) в частных производных).

Теперь давайте обсудим, могут ли характеристики пересекаться.
Сначала с точки зрения географии: могут ли две горизонтали пересечься? Ответ очевиден: да, если они соответствуют одной высоте и нет, если они соответствуют разным.

Точно так же и в математике: да, если они соответствуют одному и тому же значению С.

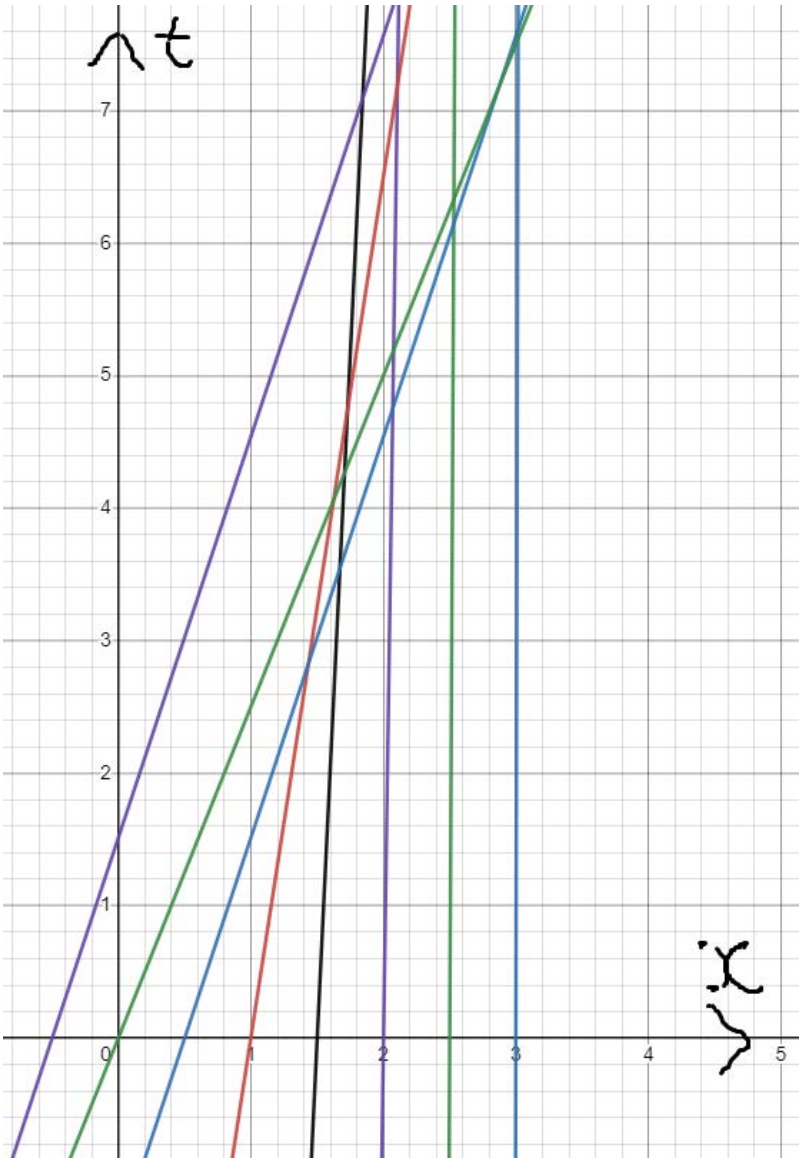
Например, для u(x,y)=xy



в качестве примера характеристик можно взять две оси (абсцисс и ординат), соответствующие C=0. Они вполне себе пересекаются в нуле.

Точки, где пересекаются характеристики, очень плохи для численного счёта (не будем выяснять почему, просто плохи). Они ещё называются точками опрокидывания волны.

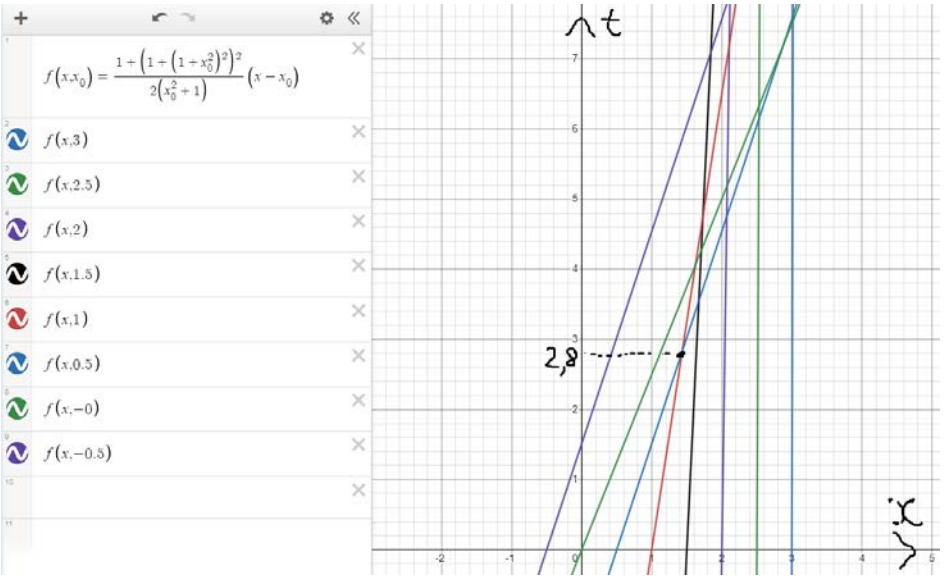
Поэтому, когда в первой проге вы будете строить характеристики, вы можете получить нечто такое:
https://www.desmos.com/calculator/b1son7vkqd



Если вы видите, что для каких-то t у вас характеристики начинают пересекаться (как на рисунке) – это означает, что до того t считать не надо, численную схему надо отрубить раньше ☺ Возможно, у вас было в детстве такое: ваши родители хотят вечером посмотреть «Следствие вели» с Леонидом Каневским, но перед этим они пытаются вас заставить лечь спать, чтобы вы не слушали про маньяков и прочих убийц? (Меня, кстати, не

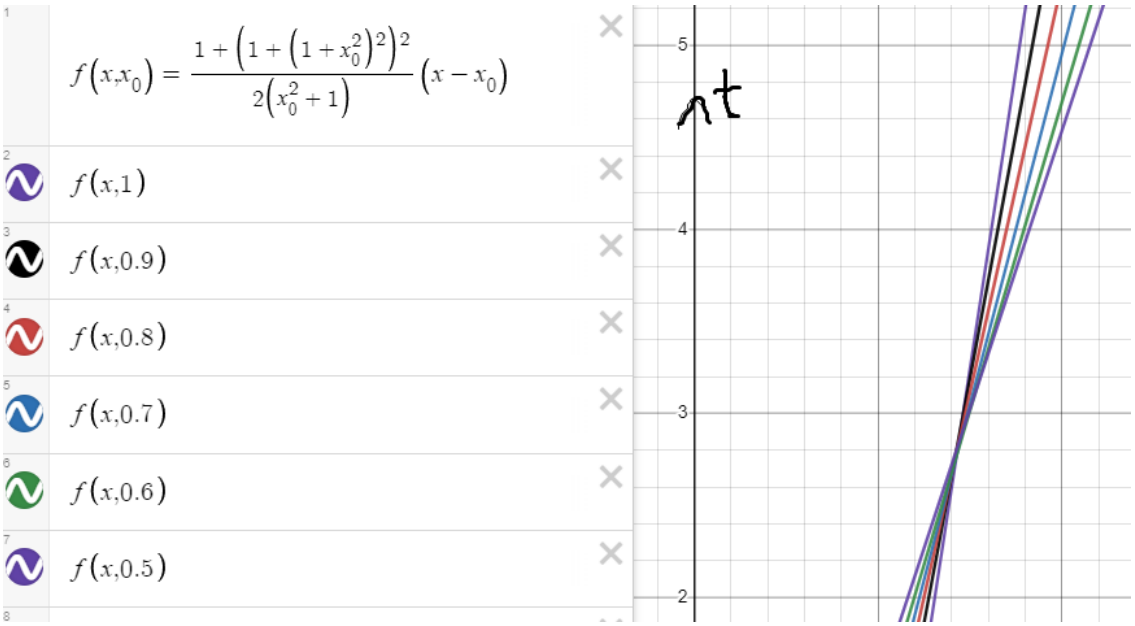
заставляли, поэтому я всё это слушал ☹). Здесь то же самое: мы, построив кучу характеристик, видим, что они начинают пересекаться при каком-то $t>t_{крит}$? Значит, нам нужно ~~уложить наше чадо спать~~ отрубить численную схему ~~чтобы ей не было страааааашно~~ чтобы она не напоролась на точку опрокидывания волны.

На рисунке $t_{крит}$ равно примерно 2,8:



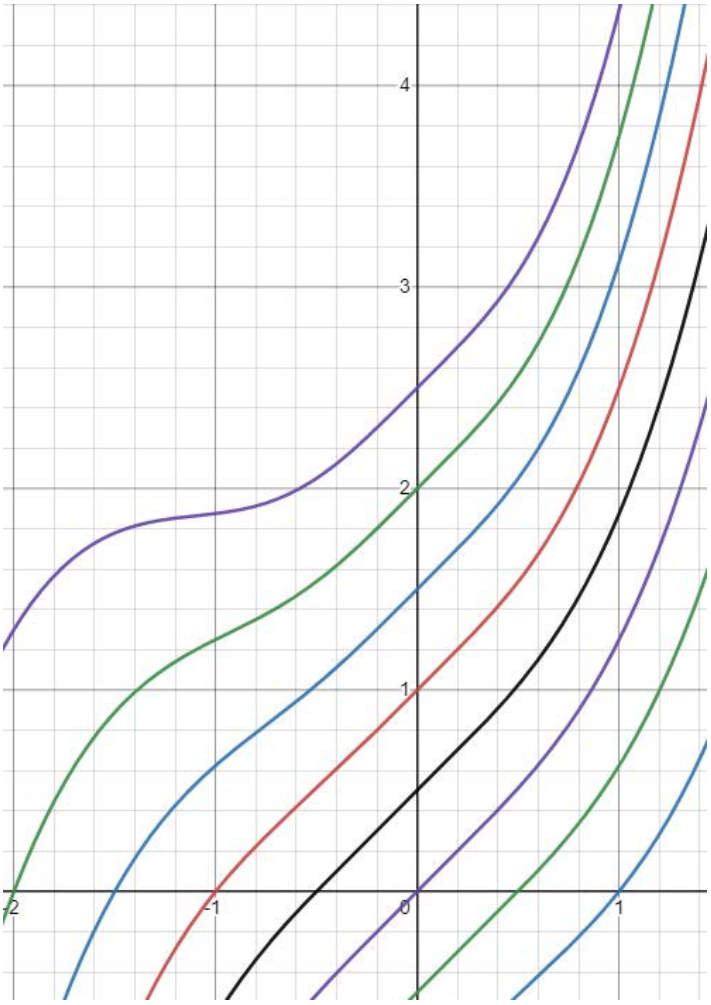
Но это оценка сверху. Хорошо понять, а нет ли точек ниже. Для этого смотрим, на пересечении каких характеристик находится наша точка: на пересечении соответствующих x0=1 и 0,5.

Делаем так:
https://www.desmos.com/calculator/rwopnajbup



Видим, что точка пересечения находится действительно где-то на уровне 2,8. Можно уложить чадо-численную схему спать заранее – на t=2, чтобы уж точно.

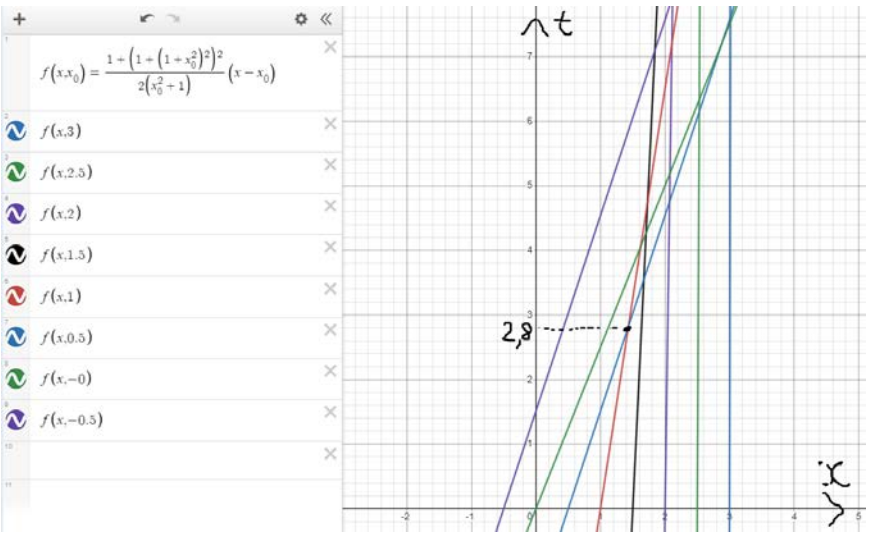
А вот другое семейство характеристик:
https://www.desmos.com/calculator/yv3qsx3a6t



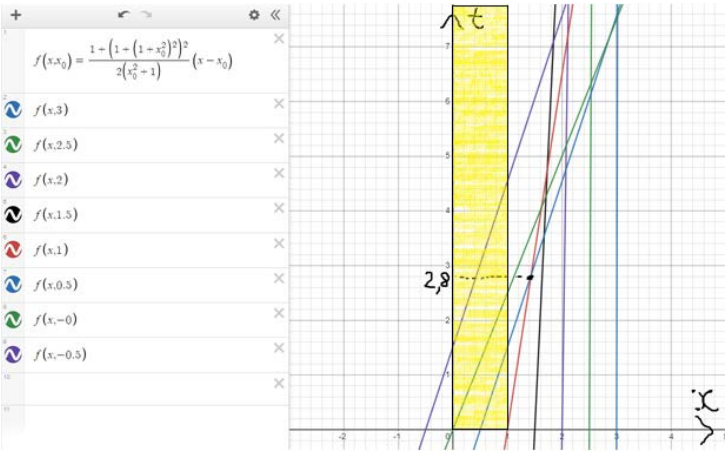
Они не пересекаются. Значит, промежуток по времени можно брать какой угодно – «Следствие вели» не начнётся ☺ Сильно большой тогда брать не надо, иначе будет слишком много шагов по времени, что негативно скажется на времени работы программы.

Ещё один нюанс: надо смотреть, какой у вас промежуток по оси абсцисс. В отличие от промежутка по времени, который выбираем мы, промежуток по оси абсцисс нам дан.

Если в этой задаче



это промежуток [0…2], то нам надо париться о точках пересечения характеристик. А вот если [0…1], то заметьте, что все характеристики пересекаются при x>1. Т.е. даже при больших t точки опрокидывания волны всё равно в численную схему не попадут:



Жёлтым закрашены та область, где будет наша численная схема. Как видите, в ней характеристики не пересекаются, они пересекаются правее. (Продолжая аналогию – «Следствие вели» начнётся, но в соседней комнате ☺)

Насчёт момента с пересечениями характеристик у меня всё, но мне ещё хочется обсудить одну сложность – непосредственное решение характеристического уравнения. (Я знаю, что его вы тупо возьмёте у старшекурсников, но мало ли).

Например, у нас задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1+u}\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad -1{,}5 \le x < 0 \\ u(x,0) &= \cos\frac{\pi x}{2}, \\ u(0,t) &= \mathrm{e}^{t}. \end{aligned}$$

В этом случае a(x,y,u)=1, $b(x,y,u) = -\frac{1}{1+u}$. Тогда

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-\frac{1}{1+u}}$$

Что множо записать как

$$dt = -(u+1)dx$$

И тут многие зависают: а что дальше?

Нужно уравнение проинтегрировать:

$$t - t_0 = -(u+1)(x - x_0)$$

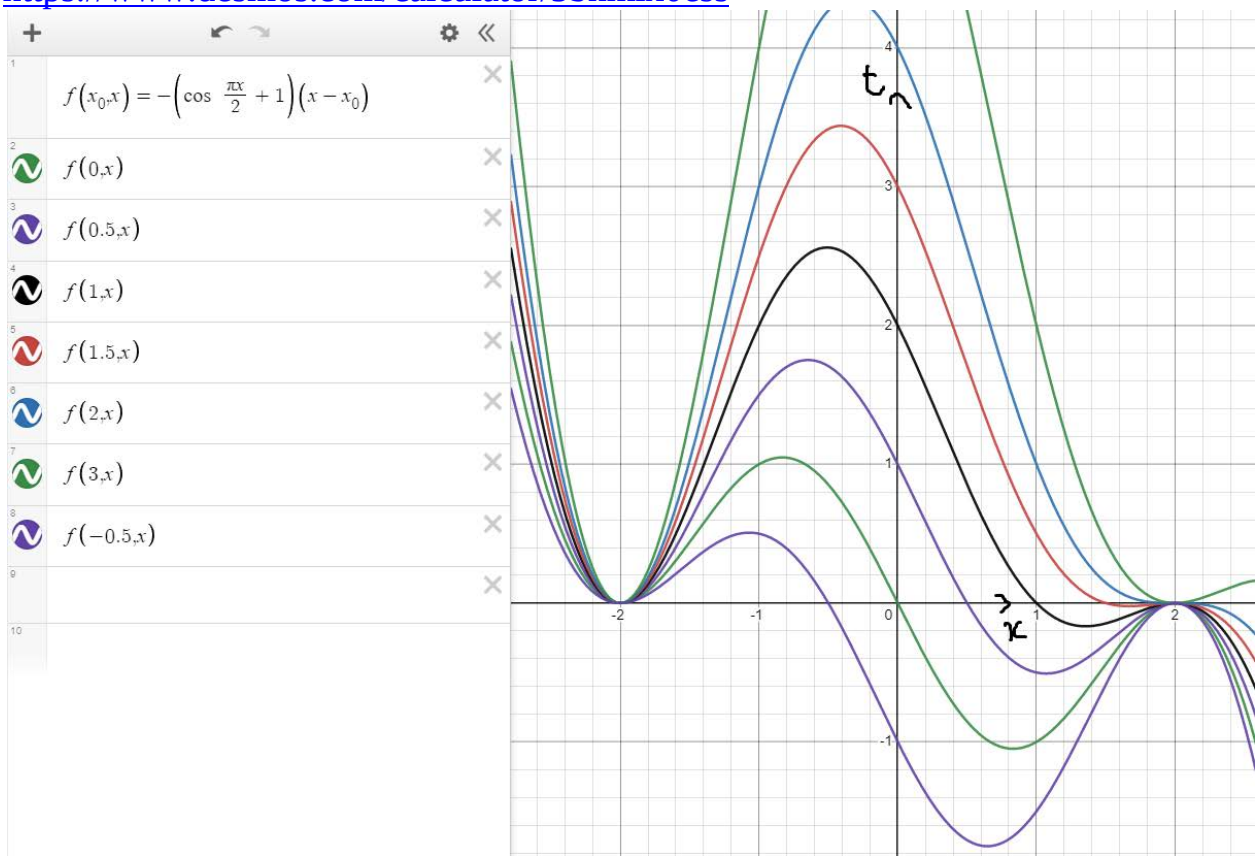
А далее подставить одно из ГУ, соответствующее t=0. Подставляем t_0=0 и u такое, какое оно в начальный момент времени

$$t - 0 = -\left(cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1\right)(x - x_0)$$

$$t = -\left(cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1\right)(x - x_0)$$

После чего строим графики для различных значений x_0:

https://www.desmos.com/calculator/5bhmlx0ess



А область у нас от -1,5 до 0. Ой, как хорошо: при x=-2 и x=2 у нас какие-то точки опрокидывания волны, а вот на нашем интервале всё чин-чинарём. Значит, промежуток по t можем выбирать любой.